

### Kedjebråk och Pells ekvation

Kedjebråk är en gammal fin del av aritmetiken som numera är nästan helt bortglömd, i alla fall har de försvunnit ur kurserna. För vårt vidkommande är de en bra repetition av bl a Euklides algoritmen och lösning av diofantiska ekvationer av typen  $ax + by = 1$ . De ger också bra övning på att arbeta med kvadratrötter.

Betrakta bråket  $87/38$  och dividera flera gånger:

$$\frac{87}{38} = 2 + \frac{11}{38} = 2 + \frac{1}{38/11} = 2 + \frac{1}{3 + 5/11} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}$$

Det här är förstås inget annat än divisionsalgoritmen och Euklides algoritmen, som dessutom garanterar oss att processen tar slut. (Ni kommer väl ihåg Euklides algoritmen? Diskutera med varandra!)

Övning 1: Gör samma sak med bråken  $13/8$ ,  $57/16$  och  $355/113$ .

Uttrycken med bråk inuti bråk som vi har fått fram ovan kallas *kedjebråk*. Kedjebråk är besvärliga att skriva och tar stor plats, så vi inför en beteckning:

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Då blir t ex  $87/38 = [2, 3, 2, 5]$ . Hur betecknas kedjebråken i övning 1? Låt  $a/b$  vara ett positivt rationellt tal (dvs ett vanligt bråk), förkortat så långt som möjligt och låt kedjebråksutvecklingen vara  $a/b = [c_0, c_1, \dots, c_n]$ . Talet  $[c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$  som vi får genom att stryka den sista termen  $c_n$  är också ett bråk, säg  $p/q$ . Man kan bevisa att  $aq - bp = \pm 1$  (tecknet beror på om  $n$  är jämnt eller udda).

Övning 2: Verifiera detta för  $87/38$  och talen i övning 1. Lägg märke till att vi på detta sätt har hittat en lösning till den diofantiska ekvationen  $ax + by = 1$ ! Kul, inte sant?

Man kan utveckla irrationella tal i kedjebråk också, men då tar utvecklingen inte slut.

Exempel: Låt  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ . Då är  $(\alpha - 1)^2 = 2$  och  $\alpha^2 - 2\alpha = 1$ . Skriv detta som  $\alpha = 2 + 1/\alpha$ . I det här uttrycket kan vi ersätta  $\alpha$  i nämnaren i den andra termen i högerledet med  $2 + 1/\alpha$  och får då

$$\alpha = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha}}$$

Vi kan ersätta  $\alpha$  i högerledet en gång till med  $2 + 1/\alpha$ :

$$\alpha = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha}}}$$

och så kan vi fortsätta. Det är naturligtvis frestande att skriva

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [2, 2, 2, \dots].$$

Men frågan är hur man skall tolka det oändliga kedjebråket. Vad menas med ett bråk med oändligt många täljare och nämnare? Vi skall inte bekymra oss om det, utan litar på att alla problem går att lösa och att allt fungerar som vi vill.

Övning 3: Utveckla  $\gamma = (\sqrt{5} + 1)/2$  i kedjebråk. Använd att  $\gamma^2 = 1 + \gamma$  (visa det först!).

Antag att  $\alpha$  är ett irrationellt tal med kedjebråksutvecklingen

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots].$$

Man kan bevisa att de *rationella* talen

$$A_n = [a_0, \dots, a_n]$$

snabbt närmar sig  $\alpha$  då  $n$  växer. De kallas *konvergenterna* till kedjebråksutvecklingen.

Övning 4: Räkna ut  $A_n$  för  $n = 1, 2, 3$  och  $4$  för  $1 + \sqrt{2}$  och  $(\sqrt{5} + 1)/2$ . Använd gärna era räknare för att jämföra  $A_n$  med de exakta värdena.

Vilket tal betyder utvecklingen  $[1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$ ? Kalla det  $\beta$ . Då är tydligen

$$\beta = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\beta}}$$

vilket ger ekvationen  $2\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$ . Löser man den så får man  $\beta = (\sqrt{3}+1)/2$ .

Övning 5: Vilka tal har kedjebråksutvecklingarna  $[3, 3, 3, \dots]$ ,  $[4, 2, 4, 2, 4, 2, \dots]$  och  $[4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, \dots]$ ?

Tal av formen  $a+b\sqrt{d}$  med heltal  $a, b, d$  har ganska enkla kedjebråksutvecklingar, de är alla av samma periodiska typ som vi såg ovan. Det finns en del andra tal som har ”enkla” utvecklingar också, t ex är

$$e - 1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots].$$

Övning 6: Räkna ut de första konvergenterna till  $e - 1$ . Vad ger räknaren för värden?

Däremot är inte mycket känt om kedjebråksutvecklingen av  $\pi$ . Den börjar

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, \dots],$$

men om det finns något mönster i den är okänt.

Övning 7: Räkna ut de första konvergenterna till  $\pi$ . Känner ni igen någon av dem?

En av matematikens mest berömda ekvationer kallas *Pells ekvation* och ser ut så här:

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Här är  $d$  ett heltal och man söker lösningar  $x, y$  som också är heltal. Ekvationen har en sällsynt lång och rik historia och är dessutom en av hörnstenarna i den del av matematiken som kallas talteori. Ursprungligen sysslade talteorin med heltalens egenskaper (bestämningen av pythagoreiska taltripler är ett exempel på ett talteoretiskt resultat), men genom historien har det visat sig att man för att förstå heltalen måste ta till andra tal också, algebraiska, komplexa osv, och talteorin är nuförtiden den förmodligen rikaste och kanske svåraste delen av hela matematiken. Flera av de klassiska berömda problemen finns inom det här området, t ex Fermats sats.

Det är inte på något sätt uppenbart att kedjebråk har med Pells ekvation att göra, men så är det och vi skall som hastigast studera sambandet.

Övning 8: Bevisa att om  $d < 0$  eller om  $d$  är en jämn kvadrat så är  $x = \pm 1, y = 0$  de enda lösningarna till Pells ekvation.

Det är alltså bara då  $d$  är positivt och inte en jämn kvadrat som ekvationen är intressant.

Övning 9: Försök finna en lösning till  $x^2 - 2y^2 = 1$ . Beteckna den med  $x_0, y_0$ . Definiera talen  $x_n, y_n$  genom

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Visa att  $x_n, y_n$  för  $n = 2, 3$  och  $4$  är lösningar. Kan du bevisa att alla  $x_n, y_n$  är lösningar? (Ledning: Använd binomialsatsen.)

Övning 9 visar att om man kan hitta *en* lösning till  $x^2 - dy^2 = 1$ , så kan man hitta *oändligt många* lösningar. Svårigheten är just att bevisa att det finns minst en lösning. Man kan bevisa att det alltid finns en lösning (och därmed oändligt många). Vi skall ta exemplet  $d = 13$ , alltså  $x^2 - 13y^2 = 1$ . Kedjebråksutveckla talet  $\sqrt{13}$ :

$$\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 6, \dots].$$

Avbryt efter åtta steg och betrakta  $[3, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1]$ :

$$[3, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1] = \frac{649}{180}.$$

Då är  $x_0 = 649, y_0 = 180$  en lösning till Pells ekvation (verifiera det!) och det är till och med den minsta lösningen.

Övning 10: Visa att  $\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, \dots]$ . Sätt  $p/q = [2, 1, 1, 1]$  och visa att  $x_0 = p, y_0 = q$  är en lösning till  $x^2 - 7y^2 = 1$ .

Bland de första att studera kedjebråk var John Wallis (1616-1703) och Christiaan Huygens (1629-95), men den första teorin för dem gavs av Leonhard Euler (1707-83). Pells ekvation har en lång och rik historia. Fermat (1601-65) ställde 1657 sina kolleger, i synnerhet "the English", inför utmaningen att lösa ekvationen  $x^2 - dy^2 = 1$  för olika värden på  $d$ , bl a  $d = 109$  och  $149$ . Han visste vad han gjorde, för just för dessa värden består fundamentallösningen av ordentligt stora tal; för  $d = 109$  är t ex  $x_0 = 15140424455100$ . John Wallis och Lord Brouncker arbetade båda med problemet och lyckades hitta en metod att generera lösningar om det finns några, men varken de eller Fermat själv tycks ha funderat över lösningarnas *existens*. Det första beviset för att det alltid finns lösningar gavs av J.J. Lagrange (1736-1813) 1766. Det var Euler som av misstag gav ekvationen dess nuvarande namn, trots att Pell aldrig sysslade med den. John Pell var samtida med Wallis och har inte satt några djupare spår i matematikhistorien.

Men Fermat och de engelska matematikerna var långt ifrån de första som sysslade med Pells ekvation. Redan före vår tideräknings början intresserade sig indiska matematiker för den och sambandet  $577^2 - 2 \cdot 408^2 = 1$  var känt där redan för 2500 år sedan. Brahmagupta (f 598) visade att  $(1151, 120)$  är fundamentallösningen till  $x^2 - 92y^2 = 1$  och Bhaskara (f 1114) uppfann en systematisk metod att lösa Pells ekvation.

Lessing publicerade 1773 ett manuskript från Wolfenbüttel-biblioteket med ett problem som härrör från Arkimedes. Det handlar om solguden Helios kreatur som betar på ön Trinakia. På ön finns det vita, svarta, gula och brokiga tjuvar och kor. Låt antalet av dessa vara  $X, Y, Z, T$  respektive  $x, y, z, t$ . Man får veta

att

$$\begin{aligned}X &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Y + Z \\Y &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)T + Z \\T &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)X + Z \\x &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(Y + y) \\y &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(T + t) \\t &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z) \\z &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(X + x)\end{aligned}$$

Dessutom är  $X + Y$  ett kvadrattal och  $Z + T$  ett triangeltal. Hur många djur betar på Trinakias slätter?

Man kan visa att Arkimedes problem leder till ekvationen

$$m^2 - 410286423278424n^2 = 1.$$

En tysk matematiker, A. Amthor, visade 1880 att perioden i kedjebråksutvecklingen av 410286423278424 har längd 203 254 och att lösningen till Arkimedes problem är ett tal med 206 545 siffror. Det börjar med 77602714 och slutar med 55081800. Det finns inga belegg för att Arkimedes kände till kedjebråk, men säker kan man förstås inte vara, han var ju en framstående räknare.